

Boolesche Felder zur Behandlung des Erfüllbarkeitsproblems für konjunktive Normalformen

Es besteht die Möglichkeit, eine Abbildung zu definieren, die konjunktive Normalformen auf boolesche Felder abbildet. Dies geschieht in einer Form, dass Produkte der Felder mit Erfüllbarkeitsbedingungen der konjunktiven Normalformen verträglich sind. Erfüllende Belegungen der Elementaraussagen für eine erfüllbare konjunktive Normalform können dann durch Fixpunkte von Abbildungen boolescher Vektoren ermittelt werden. Hierüber wird die Erfüllbarkeit von konjunktiven Normalformen in Polynomialzeit entscheidbar, für die dies bisher noch nicht bekannt war [3],[4]. Es gibt eine aufsteigende Klasse von k -dichten konjunktiven Normalformen, deren Erfüllbarkeit mit einem Aufwand von $O(n^{3k-1})$ booleschen Operationen entscheidbar ist. Sind die Werte von k im Verhältnis zu n groß, so ist diese Größenordnung mit einem exponentiellen Aufwand vergleichbar.

Kurzfassung

Eine 1-KNF wird auf einen booleschen Vektor abgebildet. Eine Eins in der i -ten Komponente bedeutet, dass die Elementaraussage A_i in der 1-KNF auftritt und damit gleichzeitig, dass in einer erfüllenden Belegung A_i mit Wahr belegt werden muss. Eine Null in der i -ten Komponente bedeutet aber nicht, dass die Elementaraussage A_i mit Falsch belegt wird. Stattdessen werden zusätzlich die Aussagen $A_{i+n} \Leftrightarrow \bar{A}_i$ hinzugenommen, wobei n die Anzahl der betrachteten Elementaraussagen ist. Die 1-KNF wird durch einen Vektor mit $2n$ Komponenten dargestellt. Tritt $\bar{A}_i$ in der 1-KNF auf, so wird die $(n+i)$ -te Komponente des Vektors zu 1 gesetzt. Dies bietet zum einen die Möglichkeit, partielle Belegungen der Elementaraussagen darzustellen. Zum anderen können auch auftretende Widersprüche in der 1-KNF im Vektor dargestellt werden.

Eine 2-KNF wird auf eine boolesche Matrix A abgebildet. Diese Matrix erhält man auch als Adjazenzmatrix des gerichteten Graphen, der über die 2-KNF bestimmt ist [1],[2]. Wobei die Diagonalelemente zusätzlich den Wert 1 besitzen. Ist die 2-KNF erfüllbar, so kann einer erfüllenden Belegung ein Vektor x zugeordnet werden, der Fixpunkt unter der Abbildung $F_2 : x \mapsto x \cdot A$ ist.

Die Rechnungen in den Komponenten finden immer in der booleschen Algebra statt.

Diese Fixpunkte lassen sich über die Zeilen einer idempotenten Matrix A^k bestimmen. Zu jeder hier betrachteten Matrix A gibt es $k < (2n)^2$, so dass A^k idempotent ist.

Besitzt sowohl eine i -te Zeile als auch eine $(i+n)$ -te Zeile der Matrix A^k einen Widerspruch, so ist die 2-KNF nicht erfüllbar. Da die Abbildung F_2 linear ist, bilden sonst die widerspruchsfreien Zeilen der Matrix A^k eine Art Basis für Fixpunkte, die zu erfüllenden Belegungen der Elementaraussagen führen.

Eine 3-KNF wird auf ein dreidimensionales Feld T abgebildet. Auch hier gilt analog: Ist die 3-KNF erfüllbar, so kann einer erfüllenden Belegung ein Vektor x zugeordnet werden, der Fixpunkt unter der Abbildung $F_3 : x \mapsto x \cdot (x \cdot T)$ ist.

Zunächst ist es möglich, T durch wiederholte Anwendung eines Produktes in maximal $(2n)^3$ Schritten in ein dreidimensionales Feld $\bar{T}$ zu überführen, in dem jede Zeile ein Fixpunkt unter der Abbildung F_3 ist. Es gibt 3-KNF, bei denen auf diesem Wege die Erfüllbarkeit mit einem Aufwand von maximal $O(n^8)$ entschieden werden kann. Auf Seite 18 findet sich dafür ein Beispiel. Anders als bei der 2-KNF ist die Fixpunktabbildung aber nicht linear, so dass nicht immer eine Entscheidung getroffen werden kann. Denn die Summe partieller Fixpunkte muss nicht selber wieder ein Fixpunkt sein.

Führt die Behandlung von T nicht zur Entscheidung, ob eine 3-KNF erfüllbar ist, so besteht die Möglichkeit höher dimensionale Felder zu betrachten. Über das innere Produkt $S = T \cdot T$ entsteht ein vierdimensionales Feld. Im Urbild dieses Feldes finden sich neben den in der vorgegebenen 3-KNF vorhandenen Klauseln noch mögliche Resolventen mit vier Literalen.

Wieder gibt es eine Abbildung $F_4 : x \mapsto x \cdot (x \cdot (x \cdot S))$

Erfüllende Belegungen der 3-KNF führen zu Fixpunkten der Abbildung F_4 und es kann ebenfalls ein Abschluss des Feldes über iterierte Anwendung eines Produktes erreicht werden. Die Menge der KNF, deren Erfüllbarkeit hierüber entschieden werden kann, ist echt enthalten in der Menge, die bereits über die Betrachtung von T entscheidbar waren. Der Aufwand zur Behandlung von S lässt sich durch $O(n^{11})$ nach oben abschätzen.

Schließlich kann S wiederholt mit T multipliziert werden. Bei jeder Multiplikation erhöht sich die Dimension um Eins. Die Menge der entscheidbaren KNF vergrößert sich einerseits, andererseits wächst der Rechenaufwand exponentiell zu $O(n^{3k-1})$ für ein k -dimensionales Feld.

Vorbemerkung

Alle Ausführungen beziehen sich auf KNF in den n Elementaraussagen $A_1, \dots, A_n$ sowie ihren Negationen. Dabei ist n beliebig aber fest gewählt. Zu den Elementaraussagen werden noch folgende n Aussagen als $A_{i+n} : \Leftrightarrow \bar{A}_i$ hinzugenommen. In der KNF werden alle Negationen $\bar{A}_i$ durch A_{i+n} ersetzt.

Die Disjunktion lässt sich äquivalent als Subjunktion darstellen. Eine Klausel der Form $A \vee B \vee C$ ist zum Beispiel äquivalent zu $\bar{A} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow C)$. Damit werden alle Klauseln als Ketten von Subjunktionen dargestellt. Es wird aber weiter von Klauseln gesprochen. Es gibt $k!$ Möglichkeiten eine Klausel mit k Literalen durch eine Subjunktionskette darzustellen. Dem wird später Beachtung geschenkt. Zunächst wird eine Subjunktionskette ausgewählt.

Weiter lässt sich jede k -Klausel zu einer $(k+1)$ -Klausel äquivalent umformen, indem eines der auftretenden Literale nochmals mit einer Disjunktion hinzugefügt wird. Bei einer k KNF kann davon ausgegangen werden, dass alle Klauseln k -Klauseln sind.

Alle Rechenoperationen für die Komponenten der Felder finden in der booleschen Algebra statt.

Alle k -dimensionalen Felder besitzen $(2n)^k$ Komponenten.

Wenn nichts anderes bemerkt ist, gilt für alle Indizes $1 \leq i \leq 2n$.

Boolesche Felder

Ein k -dimensionales Feld $T = (t_{i_1 \dots i_k})$ heißt **Boolesches Feld**, wenn seine Komponenten $t_{i_1 \dots i_k}$ boolesche Größen sind.

Eindimensionale Felder $x = (x_i)$ werden auch **Vektoren** genannt. Zu einem Vektor gehört die Indexmenge $I_x = \{i | x_i = 1\}$.

Zweidimensionale Felder $M = (a_{i_j})$ werden auch **Matrix** genannt. Die Zeilen einer booleschen Matrix sind boolesche Vektoren und werden mit $M_i = (a_{i_j})$ bezeichnet.

Bei einem dreidimensionalen Feld $T = (t_{i_j k})$ bilden alle Komponenten, deren erster Index i ist, eine Untermatrix $T_i = (t_{i_j k})$. Alle Komponenten, deren erster Index i und deren zweiter Index j ist, bilden Vektoren $T_{i_j} = (t_{i_j k})$. Diese Vektoren werden auch Zeilen des Feldes T genannt.

Rechenoperationen für boolesche Felder

Zwei k -dimensionale Felder können wie üblich komponentenweise addiert werden. Die Addition wird in der booleschen Algebra ausgeführt. Es übertragen sich das Assoziativ- und das Kommutativgesetz aus dem Rechnen mit reellen Zahlen. Es gibt hier kein Inverses der Addition.

Schreibweise: $U + V$

Ein k -dimensionales Feld kann mit einem Vektor multipliziert werden. Dabei entsteht ein $(k-1)$ -dimensionales Feld. Für einen Vektor und eine Matrix ist dies das gewohnte Produkt. Alle Rechenoperationen für die Komponenten werden jedoch in der booleschen Algebra durchgeführt.

Es sei $T = (t_{i_1 \dots i_k})$ und $x = (x_i)$. Dann ist

$$x \cdot T = (c_{i_2 \dots i_k}) \quad \text{mit}$$

$$c_{i_2 \dots i_k} = \sum_j x_j \cdot t_{j i_2 \dots i_k}.$$

Zwei Matrizen können wie gewohnt miteinander multipliziert werden. Auch hierbei werden die Rechenoperationen für die Komponenten in der booleschen Algebra ausgeführt.

Die Multiplikation erfüllt das Assoziativgesetz und die Distributivgesetze mit der Addition.

Allgemein kann ein k -dimensionales Feld $T = (t_{i_1 \dots i_k})$ mit einem m -dimensionalen Feld $S = (s_{i_1 \dots i_m})$ multipliziert werden. Dabei entsteht ein $(k + m - 2)$ -dimensionales Feld

$T \cdot S = U = (u_{i_1 \dots i_r})$ mit $r = k + m - 2$, wobei

$$u_{i_1 \dots i_{k-1} j_1 \dots j_{m-1}} = \sum_p t_{i_1 \dots i_{k-1} p} \cdot s_{p j_1 \dots j_{m-1}}$$

Enthaltensrelationen für boolesche Felder

Gilt für zwei boolesche Felder $U = (u_{i_1 \dots i_k})$ und $T = (t_{i_1 \dots i_k})$, dass für jede Indexkombination gilt: $u_{i_1 \dots i_k} = 1 \Rightarrow t_{i_1 \dots i_k} = 1$, so ist das Feld U im Feld T enthalten.

Schreibweise: $U \subseteq T$.

Beispiele:

$$U, T \subseteq U + T$$

Ist die Einheitsmatrix in den Matrizen A und B enthalten, so gilt:

$$A, B \subseteq A \cdot B$$

Abbildung der konjunktiven Normalformen in die Booleschen Felder

Es wird eine invertierbare Abbildung L definiert, die jeder k -KNF, die nur k -Klauseln enthält, ein k -dimensionales boolesches Feld zuordnet. Dabei kann jede k -KNF äquivalent zu einer k -KNF umgeformt werden, die ausschließlich k -Klauseln enthält. Dazu werden Klauseln, die weniger Literale enthalten, bereits in der Klausel vorkommende Literale hinzugefügt. So gilt zum Beispiel: $A \vee B \Leftrightarrow A \vee B \vee A$.

Die Elementaraussagen und damit auch die 1-KNF werden auf boolesche Vektoren abgebildet:

$$L(A_i) := e_i \quad \text{für } i = 1 \dots n$$

$$L(\overline{A_i}) := e_{i+n} \quad \text{für } i = 1 \dots n$$

Dabei sind die e_i für $i = 1 \dots 2n$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^{2n}$.

Es seien A und B zwei k -KNF, dann wird die Konjunktion aussagenlogischer Formeln allgemein durch die Addition der zugehörigen Felder realisiert:

$$L(A \wedge B) := L(A) + L(B)$$

Anders als in der booleschen Algebra wird also die Konjunktion durch Addition simuliert. Die Disjunktion wird – wie bereits erwähnt – über Subjunktionen dargestellt. Es sei B eine Klausel mit m Literalen, dann wird die Abbildung L für die Subjunktion wie folgt rekursiv definiert:

$$L(A_i \rightarrow B) := e_i \otimes L(B)$$

Dabei ist $e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k}$ ein k -dimensionales Feld $T = (t_{i_1 \dots i_k})$, für das nur die Komponente $t_{j_1 \dots j_k}$ den Wert 1 besitzt. Alle anderen Komponenten besitzen den Wert 0.

Eine 2-KNF wird hierüber auf eine Matrix abgebildet, deren Komponenten a_{ij} genau dann den Wert 1 besitzen, wenn die Klausel $(A_i \rightarrow A_j)$ in der 2-KNF auftritt.

Satz 1:

Für einen Vektor x und ein k -dimensionales Feld T mit $k > 1$ gilt:

$$L^{-1}(x) \wedge L^{-1}(T) \Rightarrow L^{-1}(x \cdot T)$$

Für ein k -dimensionales Feld A und ein m -dimensionales Feld B mit $k, m > 1$ gilt:

$$L^{-1}(A) \wedge L^{-1}(B) \Rightarrow L^{-1}(A \cdot B)$$

Dies gilt, da alle neu auftretenden Klauseln in $L^{-1}(x \cdot T)$ sowie in $L^{-1}(A \cdot B)$ Resolventen der vorgegebenen Klauseln sind.

Definition für die Indizes

Um die Darstellung zu vereinfachen wird folgende Definition eingeführt.

$$[i] := \begin{cases} i + n & \text{für } i \leq n \\ i - n & \text{für } n < i \leq 2n \end{cases}$$

$$\text{Damit ist } A_{[i]} = \begin{cases} \bar{A}_i & \text{für } i \leq n \\ A_{i-n} & \text{für } n < i \leq 2n \end{cases}$$

$A_{[i]}$ ist in jedem Fall die Negation von A_i .

Boolesche Vektoren und Belegungen einer KNF

Ein boolescher Vektor $x = (x_i)$ stellt eine 1-KNF dar:

$$L^{-1}(x) = \bigwedge_{i \in I_x} A_i$$

Eine solche 1-KNF ist genau dann nicht erfüllbar, wenn für ein i sowohl A_i als auch $\bar{A}_i$ in der Konjunktion vorkommen. Daraus ergibt sich folgende Definition:

Ein boolescher Vektor heißt **widerspruchsfrei**, wenn für $1 \leq i \leq 2n$ gilt:

$$i \in I_x \Rightarrow [i] \notin I_x.$$

Eine zulässige Belegung der Elementaraussagen bei einer erfüllbaren 1-KNF kann unmittelbar abgelesen werden. Diese Belegung wird für einen widerspruchsfreien Vektor x mit $B(x)$ bezeichnet. Nur wenn für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt: $i \in I_x \vee [i] \in I_x$, liefert $B(x)$ auch eine vollständige Belegung der Elementaraussagen. Daraus ergibt sich folgende Definition:

Ein boolescher Vektor heißt **vollständig**, wenn für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$i \in I_x \vee [i] \in I_x.$$

Eine k -KNF ist also genau dann erfüllbar, wenn es einen vollständigen, widerspruchsfreien Vektor x gibt, so dass $B(x)$ eine zulässige Belegung der k -KNF ist.

Boolesche Matrizen und die 2-KNF

Es ist bereits bekannt, dass die Erfüllbarkeit der 2-KNF in Polynomialzeit entscheidbar ist [1], [4]. Die hier vorgestellte Vorgehensweise wird später für die k -KNF verallgemeinert. Außerdem werden die Ergebnisse für die 2-KNF dabei benutzt. Daher soll sie vollständig dargestellt werden

Eine boolesche $2n \times 2n$ - Matrix $M = (a_{ij})$ stellt eine 2-KNF dar.

Es sei $I = \{(i, j) \mid a_{ij} = 1\}$.

Dann ist $L^{-1}(M) = \bigwedge_{(i,j) \in I} (A_i \rightarrow A_j)$

Die hier beschriebene Matrix ist abgesehen davon, dass die Einträge als boolesche Größen behandelt werden, identisch mit der Adjazenzmatrix des Graphen, der durch die 2-KNF gegeben ist [1], [2].

Eine boolesche Matrix $M_v = (c_{ij})$ heißt **vollständig**, wenn gilt:

Für alle $1 \leq i, j \leq 2n$: $c_{ii} = 1$ sowie $c_{ij} = 1 \Rightarrow c_{[j][i]} = 1$

Jede Matrix M kann zu einer vollständigen Matrix M_v ergänzt werden und es gilt:

$$L^{-1}(M) \Leftrightarrow L^{-1}(M_v)$$

Dies gilt, da $A_i \rightarrow A_j \Leftrightarrow \overline{A_j} \rightarrow \overline{A_i}$ und die Klausel $A_i \rightarrow A_i$ eine Tautologie ist.

Eine vollständige Matrix enthält die Einheitsmatrix und daher gilt für vollständige Matrizen:

$$x \subseteq x \cdot M_v$$

Satz 2:

x sei ein boolescher Vektor und $M = (a_{ij})$ eine vollständige boolesche Matrix.

$B(x)$ ist genau dann eine zulässige Belegung für die 2-KNF $L^{-1}(M)$, wenn x ein vollständiger widerspruchsfreier Vektor ist und

$$x \cdot M = x \text{ gilt.}$$

d.h. x ist Fixpunkt unter der Abbildung $F_2 : x \mapsto x \cdot M$.

In diesem Falle wird x auch Fixpunkt der Matrix M genannt.

Eine 2-KNF $L^{-1}(M)$ ist also genau dann erfüllbar, wenn M wenigstens einen widerspruchsfreien vollständigen Fixpunkt besitzt.

Beweis:

Zunächst wird angenommen, dass x ein vollständiger widerspruchsfreier Fixpunkt der Matrix M ist. Zu zeigen ist dann, $B(x)$ ist eine Belegung der Elementaraussagen, die $L^{-1}(M)$ erfüllt.

Angenommen, $L^{-1}(M)$ wird nicht erfüllt. Dann gibt es eine Klausel $A_i \rightarrow A_j$ und A_i wurde mit wahr belegt und A_j wurde mit falsch belegt. Daher ist

$$a_{ij} = 1, \quad x_i = 1 \quad x_{[j]} = 1$$

Mit $a_{ij} = 1, \quad x_i = 1$ erhält die j -te Komponente von $x \cdot M$ den Wert 1. Da x ein Fixpunkt der Matrix M ist, gilt also $x_j = 1$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass der Vektor x widerspruchsfrei ist. Womit die eine Richtung der Äquivalenz gezeigt wurde.

Andersherum wird angenommen, dass die 2-KNF $L^{-1}(M)$ erfüllbar ist. Dann gibt es eine zulässige Belegung der Elementaraussagen. Daraus kann wie folgt ein boolescher Vektor $x = (x_i)$ gebildet werden:

Für $1 \leq i \leq n$ werden folgende Belegungen der Komponenten von x vorgenommen: Besitzt A_i den Wahrheitswert wahr, so belegt man: $x_i = 1 \quad x_{[i]} = 0$. Besitzt A_i den Wahrheitswert falsch, so belegt man: $x_i = 0 \quad x_{[i]} = 1$.

Die Belegung gewährleistet, dass x vollständig und widerspruchsfrei ist. Nun bleibt zu zeigen, dass x ein Fixpunkt der Matrix M ist.

Angenommen, x ist kein Fixpunkt der Matrix M . Da M vollständig ist, gilt: $x \subseteq x \cdot M$.

Gilt nun $x \cdot M = y = (y_i) \neq x$, so gibt es ein i mit $y_i = 1$ und $x_i = 0$.

Daher muss es eine Komponente $c_{ji} = 1$ mit $j \neq i$ der Matrix M geben sowie $x_j = 1$ gelten.

Mit $c_{ji} = 1$ enthält die 2-KNF die Klausel $A_i \rightarrow A_j$. Mit $x_i = 0$ wurde die Aussage A_i mit falsch belegt, denn x ist vollständig. Mit $x_j = 1$ wurde die Aussage A_j mit wahr belegt. (Bei A_i und A_j kann es sich auch um Negationen der ursprünglichen n Elementaraussagen handeln.) Dies widerspricht aber der Annahme, dass die Belegung der Elementaraussagen die 2-KNF erfüllt. Also muss x ein Fixpunkt der Matrix M sein.

Ermittlung der zulässigen Belegungen einer 2KNF

Gegeben sei eine 2-KNF und die zugehörige vollständige Matrix $M = (a_{ij})$. Man bildet die Folge von Matrizen:

$$B_{(0)} = M$$

$$B_{(k+1)} = M \cdot B_{(k)} = M^{k+2}$$

Dann gibt es k , für das gilt: $B_{(k+1)} = B_{(k)}$.

Das Produkt zweier vollständiger Matrizen ist wieder vollständig. Es gilt also $B_{(k)} \subseteq B_{(k+1)}$.

Wenn die beiden Matrizen nicht gleich sind, so besitzt $B_{(k+1)}$ wenigstens eine Komponente weniger, deren Wert 0 ist. Spätestens nach $4n^2$ Schritten, gilt also $B_{(k+1)} = B_{(k)}$.

Da das Assoziativgesetz für die Multiplikation gilt, kann die Matrix $B_{(k)}$ auch durch die Folge

$$C_{(0)} = M$$

$$C_{(k+1)} = C_{(k)}^2 = M^{2^{k+1}}$$

gebildet werden. Die Matrizen $C_{(k)}$ sind dann bereits für $k > 2 \cdot \lg(n) + 1$ idempotent und es gilt: $C_{(k+1)} = C_{(k)}$

Ist die Matrix M^k idempotent, so wird sie als **Abschluss** der Matrix M bezeichnet.

Schreibweise: $\overline{M}$.

Die Matrix $\overline{M} = (c_{ij})$ besitzt dieselben Fixpunkte wie die Matrix M .

Da bei der Matrixmultiplikation die Zeilen der ersten Matrix mit der zweiten Matrix multipliziert werden, sind nun alle Zeilen der Matrix $\overline{M}$ Fixpunkte von $\overline{M}$ und damit auch Fixpunkte von M .

Weiter ist die Abbildung $F_2 : x \mapsto x \cdot M$ als Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix linear. Dies bedeutet, dass Summen von Fixpunkten wieder Fixpunkte der Matrix M sind. Die Linearkombinationen von Zeilen der Matrix $\overline{M}$ sind also die Fixpunkte der Matrix M . Dies sind auch alle möglichen Fixpunkte, denn es gilt:

Ist x ein Fixpunkt der Matrix $\overline{M}$ und ist $x_i = 1$, so ist die i -te Zeile der Matrix $\overline{M}$ in x enthalten, da ja $x = x \cdot \overline{M}$.

Nun sind noch die vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkte zu identifizieren.

Enthält die i -te Zeile der Matrix $\overline{M}$ einen Widerspruch, so gilt: $c_{i[i]} = 1$. Aus $L^{-1}(\overline{M})$

(und damit natürlich auch aus $L^{-1}(M)$) lässt sich dann die Einsklausel $\overline{A}_i$ ableiten.

Die Matrix $\overline{M}$ enthält einen Widerspruch, wenn es i gibt mit $c_{i[i]} = c_{[i]i} = 1$. In diesem Falle besitzt $\overline{M}$ keinen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkt und die 2-KNF $L^{-1}(M)$ ist nicht erfüllbar.

Entsprechend nennt man die Matrix $\overline{M}$ **widerspruchsfrei**, wenn für alle i gilt:

$$c_{i[i]} = 0 \quad \vee \quad c_{[i]i} = 0 .$$

Bei einer widerspruchsfreien Matrix ist also für alle k mit $1 \leq k \leq n$ von der k -ten Zeile und der $(k+n)$ -ten Zeile wenigstens eine widerspruchsfrei.

Satz 3:

Es sei $\overline{M}$ eine vollständige, abgeschlossene, widerspruchsfreie Matrix und $x = (x_i)$ ein widerspruchsfreier Fixpunkt von $\overline{M}$. Weiter sei $x_k = x_{[k]} = 0$, wobei $1 \leq k \leq 2n$, und die k -te Zeile $\overline{M}_k$ von $\overline{M}$ sei widerspruchsfrei.

Dann ist auch $x + \overline{M}_k$ widerspruchsfrei.

Damit können vollständige widerspruchsfreie Fixpunkte der Matrix $\overline{M}$ iterativ als Summen der Zeilen von $\overline{M}$ zusammengesetzt werden. Da es für die Überlegungen zur 3-KNF von Bedeutung ist, wird noch die Anzahl der verschiedenen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkte abgeschätzt. Ist $\overline{M}$ nicht widerspruchsfrei, so ist die zugehörige 2-KNF $L^{-1}(\overline{M})$ nicht erfüllbar. Alle weiteren Ausführungen setzen voraus, dass $\overline{M} = (c_{ij})$ widerspruchsfrei ist.

Bisher wurden 1-Klauseln der Form A_i dadurch erkannt, dass in der Matrix $\overline{M}$ die $[i]$ -te Zeile einen Widerspruch enthält. Jeder vollständige widerspruchsfreie Fixpunkt x muss dann erfüllen: $\overline{M}_i \subseteq x$. Dies wird durch die einfache Matrixmultiplikation nicht erreicht. Daher wird $\overline{M}$ noch zu einer **kompletten** Matrix ${}^k\overline{M} = (d_{ij})$ ergänzt, indem zu jeder Zeile von $\overline{M}$ alle Zeilen $\overline{M}_i$ addiert werden, für die gilt, dass $\overline{M}_{[i]}$ einen Widerspruch enthält.

Um die Menge der Lösungen abzuschätzen bezieht man sich nur noch auf die Zeilen, die nicht zu einer Einsklausel führen.

Es sei

$$I = \left\{ i \mid {}^k\overline{M}_i \text{ und } {}^k\overline{M}_{[i]} \text{ sind widerspruchsfrei} \right\}$$

Ist I die leere Menge, so gibt es eine eindeutige Lösung. Alle widerspruchsfreien Zeilen der Matrix ${}^k\overline{M}$ sind dann der eine vollständige und widerspruchsfreie Fixpunkt von $\overline{M}$. In diesem Fall setzt man $k_{\min} = 0$.

Sind die widerspruchsfreien Zeilen von ${}^k\overline{M}$ nicht alle vollständig, so werden Lösungen aus mehreren Vektoren zusammengesetzt. Um abzuschätzen, wie viele Vektoren erforderlich sind, um einen vollständigen Vektor zu erhalten, wird noch die Anzahl der mit 1 belegten Komponenten in den Zeilen von ${}^k\overline{M}$ ermittelt.

$$m_i = \left| \left\{ k \mid d_{ik} = 1 \right\} \right|$$

Sowie das Maximum davon.

$$m_{\max} = \max \{ m_i \mid i \in I \}$$

Gilt für alle i : $m_i = n$, so sind alle widerspruchsfreien Zeilen vollständig und es gibt so viele Lösungen, wie verschiedene widerspruchsfreie Zeilen in der Matrix $\overline{M}$ auftreten. Ansonsten können Fixpunkte durch Linearkombinationen zusammengesetzt werden. Bei der Addition von k Vektoren können maximal $k \cdot m_{\max}$ Komponenten bestimmt werden. Es werden

mindestens $k_{\min} = \left\lceil \frac{n}{m_{\max}} \right\rceil$ Zeilen der Matrix benötigt, um einen vollständigen Vektor zu

erhalten. Da bei der Addition bei jedem neu hinzugefügten Summanden zwei Wahlen

möglich sind und mindestens $k_{\min} = \left\lceil \frac{n}{m_{\max}} \right\rceil$ Wahlen getroffen werden, gilt für die Anzahl

k_{Fix} der verschiedenen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkte der Matrix $\overline{M}$

$$k_{\text{Fix}} \geq 2^{k_{\min}}$$

Die Anzahl der verschiedenen vollständigen und widerspruchsfreien Fixpunkte wächst also prinzipiell exponentiell mit n .

Es soll noch eine Abschätzung nach oben vorgenommen werden.

Es sei $m_{\min} = \min \{ m_i \mid i \in I \}$

Damit gilt $k_{\text{Fix}} \leq 2 \cdot 2^{n-m_{\min}}$

Satz 4:

Eine vollständige boolesche Matrix M besitzt genau dann Fixpunkte, wenn $\overline{M}$ widerspruchsfrei ist. Für die Anzahl der Fixpunkte k_{Fix} gilt dann:

$$2^{k_{\min}} \leq k_{\text{Fix}} \leq 2 \cdot 2^{n-m_{\min}}$$

Die Fixpunkte sind Linearkombinationen der Zeilen der Matrix $\overline{M}$

Dreidimensionale boolesche Felder und die 3-KNF

Ein boolesches $2n \times 2n \times 2n$ - Feld $T = (t_{i j k})$ stellt eine 3-KNF dar.

Es sei $I = \{ (i, j, k) \mid t_{i j k} = 1 \}$.

Dann ist $L^{-1}(T) = \bigwedge_{(i, j, k) \in I} (A_i \rightarrow (A_j \rightarrow A_k))$

Wie bereits bei den booleschen Matrizen, wird T noch durch Setzung von $t_{ijk} = 1$ ergänzt, wenn $A_i \rightarrow (A_j \rightarrow A_k)$ eine Tautologie ist oder zu einer in $L^{-1}(T)$ vorhandenen Subjunktionskette äquivalent ist.

Ein dreidimensionales Feld heißt **vollständig**, wenn $L^{-1}(T)$ alle Tautologien der Form $A_i \rightarrow (A_j \rightarrow A_k)$ enthält und zu $A_i \rightarrow (A_j \rightarrow A_k)$ alle äquivalenten Klauseln $A_l \rightarrow (A_m \rightarrow A_p)$ enthält. Ein vorgegebenes Feld S kann vervollständigt werden. Da in der zugehörigen KNF nur Klauseln hinzugefügt werden, die zu bereits vorhandenen Klauseln äquivalent sind oder Tautologien sind, sind die aus S und seiner Vervollständigung resultierenden KNF äquivalent.

Wird ein dreidimensionales Feld $T = (t_{ijk})$ mit einem Vektor $x = (x_i)$ multipliziert, so ist das Ergebnis der Multiplikation eine Matrix:

$$x \cdot T = M = (a_{jk}) \quad \text{mit} \quad a_{jk} = \sum_{i=1}^{2n} x_i \cdot t_{ijk}$$

Wird diese Matrix, nochmals mit x multipliziert, so entsteht ein Vektor:

$$x \cdot (x \cdot T) = x \cdot M = (x_k) \quad \text{mit} \quad x_k = \sum_{j=1}^{2n} x_j \cdot a_{jk} = \sum_{i,j=1}^{2n} x_i \cdot x_j \cdot t_{ijk}$$

Ist T vollständig, so gilt aufgrund der enthaltenen Einheitsmatrizen:

$$x \subseteq x \cdot (x \cdot T)$$

Satz 5:

x sei ein boolescher Vektor und $T = (t_{ijk})$ ein vollständiges boolesches Feld.

$B(x)$ ist genau dann eine zulässige Belegung für die 3-KNF $L^{-1}(T)$, wenn x ein vollständiger widerspruchsfreier Vektor ist und

$$x \cdot (x \cdot T) = x \quad \text{gilt.}$$

d.h. x ist Fixpunkt unter der Abbildung $F_3 : x \mapsto x \cdot (x \cdot T)$.

In diesem Falle wird x auch Fixpunkt des Feldes T genannt.

Der Beweis erfolgt analog zu dem entsprechenden Satz für Matrizen und die 2-KNF.

Die Abbildung ist nicht linear. Es gilt:

$$(x + y) \cdot ((x + y) \cdot T) = (x + y) \cdot (x \cdot T + y \cdot T) = x \cdot (x \cdot T) + x \cdot (y \cdot T) + y \cdot (x \cdot T) + y \cdot (y \cdot T)$$

Die Summe zweier Fixpunkte ist hier also anders als bei der 2-KNF im Allgemeinen kein Fixpunkt mehr.

Konstruktion von Fixpunkten dreidimensionaler Felder

Es sei x ein beliebiger boolescher Vektor und T ein vollständiges dreidimensionales Feld.

Man betrachtet die Folge von Vektoren:

$$x_{(0)} = x$$

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} \cdot (x_{(k)} \cdot T)$$

Entweder gilt: $x_{(k+1)} = x_{(k)}$, oder die Anzahl der Komponenten von $x_{(k+1)}$, die den Wert Null tragen ist geringer als die entsprechende Anzahl für $x_{(k)}$. Spätestens für $k = 2n$ gilt daher

$$x_{(k+1)} = x_{(k)}.$$

$x_{(k)}$ ist dann ein Fixpunkt von T . Dieser Fixpunkt, der aus x hervorgeht wird der **Abschluss von x unter T** genannt. $x_{(k)}$ muss weder vollständig noch widerspruchsfrei sein. Ist $x_{(k)}$ nicht widerspruchsfrei, so besitzen alle Komponenten den Wert 1.

Abschluss des Feldes T

Analog zum zweidimensionalen Fall soll nun das Feld T zu einem Feld $\bar{T}$ transformiert werden. Dabei soll gelten: $L^{-1}(T) \Leftrightarrow L^{-1}(\bar{T})$ und alle Zeilen von $\bar{T}$ sollen Fixpunkte von $\bar{T}$ sowie von T sein.

Bei der gewöhnlichen Multiplikation zweier dreidimensionaler Felder entsteht ein vierdimensionales Feld.

$$T \cdot T = (s_{ijkl}) \quad \text{mit} \quad s_{ijkl} = \sum_{m=1}^{2n} t_{ijm} \cdot t_{mkl}$$

Dies entspricht der Tatsache, dass mögliche Resolventen zweier Dreiklauseln zunächst eine Vierklausel sind.

Es ist jedoch möglich ein Produkt zu definieren, bei dem wieder ein dreidimensionales Feld entsteht. Dazu wird jede Zeile T_{ij} durch $T_{ij} \cdot (T_{ij} \cdot T)$ ersetzt:

$$T * T = S = (s_{ijk}) \quad \text{mit} \quad s_{ijk} = \sum_{p,q=1}^{2n} t_{ijp} \cdot t_{ijq} \cdot t_{pqk}$$

Es gilt: $L^{-1}(T) \Rightarrow L^{-1}(T * T)$

Ist T vollständig, so gilt: $L^{-1}(T) \Leftrightarrow L^{-1}(T * T)$

Beweis: Zunächst wird gezeigt, dass $L^{-1}(T) \Rightarrow L^{-1}(T * T)$

Jede Klausel, die in $L^{-1}(T * T)$ auftritt, muss also aus den in $L^{-1}(T)$ auftretenden Klauseln folgen. Nun sei

$A_i \rightarrow (A_j \rightarrow A_k)$ eine Klausel in $L^{-1}(T * T)$. Dann gilt: $s_{ijk} = 1$.

Daher gibt es l und m , so dass

$$t_{ijl} = t_{ijm} = t_{lmk} = 1.$$

Also enthält $L^{-1}(T)$ die Klauseln:

$$\begin{aligned} & (A_{[i]} \vee A_{[j]} \vee A_l) \wedge (A_{[i]} \vee A_{[j]} \vee A_m) \wedge (A_{[l]} \vee A_{[m]} \vee A_k) \Leftrightarrow \\ & (A_{[i]} \vee A_{[j]} \vee (A_l \wedge A_m)) \wedge ((A_l \wedge A_m) \vee A_k) \Rightarrow \\ & (A_{[i]} \vee A_{[j]} \vee A_k) \end{aligned}$$

Womit die Behauptung gezeigt ist.

Um den Rückschluss

$$L^{-1}(T * T) \Rightarrow L^{-1}(T)$$

für ein vollständiges Feld zu zeigen, wird gezeigt, dass

$$T \subset T * T.$$

Nun sei $t_{ijk} = 1$. Da T vollständig ist, ist auch $t_{kkk} = 1$. Und damit gilt

$$t_{ijk} \cdot t_{ijk} \cdot t_{kkk} = 1. \text{ Daher:}$$

$$s_{ijk} = \sum_{p,q=1}^{2n} t_{ijp} \cdot t_{ijq} \cdot t_{pqk} = 1.$$

Jede Klausel, die in $L^{-1}(T)$ auftritt ist dann also auch eine Klausel in $L^{-1}(T * T)$ und die behauptete Äquivalenz ist nachgewiesen.

Das Feld $T * T$ muss nicht mehr vollständig sein.

Für ein vollständiges Feld bildet man eine Folge von Feldern:

$$T_{(0)} = T$$

$T_{(k+1)}$ ist die Vervollständigung des Feldes $T_{(k)} * T_{(k)}$.

Da $T_{(k)}$ vollständig ist, gilt: $T_{(k)} \subset T_{(k+1)}$. In einem Iterationsschritt ändern sich also nur Nullen auf Einsen. Die vorhandenen Einsen bleiben erhalten.

Nach spätestens $p = 8n^3$ stagniert die Iteration und es gilt: $T_{(p+1)} = T_{(p)}$

Das Feld $T_{(p)}$ ist also mit $O(n^8)$ Rechenoperationen berechenbar.

$T_{(p)}$ wird als **Abschluss von T** bezeichnet.

Schreibweise: $\bar{T}$

Es wurde bereits gezeigt, dass $L^{-1}(T_{(k)}) \Leftrightarrow L^{-1}(T_{(k+1)})$. Mit vollständiger Induktion folgt:

$$L^{-1}(T) \Leftrightarrow L^{-1}(\bar{T})$$

Satz 6:

Es sei T ein vollständiges dreidimensionales Feld und $\bar{T}$ der Abschluss von T .

- a) Alle Fixpunkte von $\bar{T}$ sind auch Fixpunkte von T .
- b) T und $\bar{T}$ besitzen dieselben vollständigen Fixpunkte.
- c) Alle Zeilen $\bar{T}_{ij}$ von $\bar{T}$ sind Fixpunkte von $\bar{T}$ und damit auch von T . Gibt es eine vollständige widerspruchsfreie Zeile $\bar{T}_{ij}$ von $\bar{T}$, so ist die 3-KNF $L^{-1}(T)$ erfüllbar und $B(\bar{T}_{ij})$ ist eine zulässige Belegung der 3-KNF.
- d) Alle Fixpunkte von $\bar{T}$ sind Linearkombinationen der Zeilen $\bar{T}_{ij}$.
- e) Alle Fixpunkte $x = (x_i)$ von $\bar{T}$ sind auch Fixpunkte der Matrix $\bar{T}_i$, wenn $x_i = 1$.
- f) Alle Matrizen $\bar{T}_i$ sind komplett.
- g) Gibt es zwei Untermatrizen $\bar{T}_i$ und $\bar{T}_{[i]}$, die beide nicht widerspruchsfrei sind, so ist die 3-KNF $L^{-1}(T)$ nicht erfüllbar. In diesem Falle gilt für alle i, j und k : $t_{ijk} = 1$.
- h) Es sei k_1 eine natürliche Zahl und $k = \max\{n^8, k_1 \cdot n^4\}$. Gibt es zwei Matrizen $\bar{T}_i$ und $\bar{T}_{[i]}$, die beide nicht mehr als k_1 widerspruchsfreie vollständige Fixpunkte besitzen, so ist die Erfüllbarkeit der 3-KNF $L^{-1}(T)$ mit einem Gesamtaufwand von $O(k)$ booleschen Operationen entscheidbar.
- i) Entwickelt sich beim Abschluss von T keine vollständige widerspruchsfreie Zeile und entsteht kein Widerspruch in $\bar{T}_i$ und $\bar{T}_{[i]}$, so kann zunächst über die Erfüllbarkeit der 3-KNF $L^{-1}(T)$ keine Aussage gemacht werden.

Beweis:

- a) Es wird gezeigt, dass ein boolescher Vektor, der kein Fixpunkt von T ist, auch kein Fixpunkt von $\bar{T}$ ist. Es sei also

$$x \cdot (x \cdot T) = (y_i) \neq x$$

Da $x \subseteq (y_i)$ gibt es i mit

$$x_i = 0 \quad \text{und} \quad y_i = 1$$

Daher gibt es j und k , so dass

$$x_j = x_k = t_{jki} = 1$$

Da $T \subset \bar{T}$ gilt auch $\bar{t}_{jki} = 1$. Daher ergibt sich bei

$$x \cdot (x \cdot \bar{T}) = (z_j)$$

$$z_i = \sum_{p,q=1}^{2n} x_p \cdot x_q \cdot t_{pqi} = 1.$$

Da $x_i = 0$ ist x kein Fixpunkt von $\bar{T}$.

- b) x ist genau dann ein vollständiger widerspruchsfreier Fixpunkt von T beziehungsweise $\bar{T}$, wenn $B(x)$ eine zulässige Belegung für $L^{-1}(T)$ beziehungsweise $L^{-1}(\bar{T})$ ist. Es gilt $L^{-1}(T) \Leftrightarrow L^{-1}(\bar{T})$. Daher besitzen $L^{-1}(T)$ und $L^{-1}(\bar{T})$ dieselben zulässigen Belegungen und damit T und $\bar{T}$ dieselben vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkte. Vollständige Fixpunkte, die nicht widerspruchsfrei sind, besitzen in jeder Komponente die Belegung mit einer Eins und sind daher bei beiden Feldern identisch.

- c) Es gilt:

$$\bar{T} * \bar{T} = S = \bar{T}$$

Da die Zeile S_{ij} als $S_{ij} = \bar{T}_{ij} \cdot (\bar{T}_{ij} \cdot \bar{T})$ gebildet wird und $S_{ij} = \bar{T}_{ij}$, sind alle Zeilen von $\bar{T}$ Fixpunkte von $\bar{T}$.

- d) Es ist $e_i \cdot \bar{T} = \bar{T}_i$ weiter ist $e_j \cdot \bar{T}_i = \bar{T}_{ij}$ außerdem gilt noch $x = \sum_{i \in I_x} e_i$.

Ist x ein Fixpunkt von $\bar{T}$, so gilt:

$$\begin{aligned} x &= x \cdot (x \cdot \bar{T}) = x \cdot \left(\sum_{i \in I_x} e_i \cdot \bar{T} \right) = x \cdot \sum_{i \in I_x} \bar{T}_i = \sum_{j \in I_x} e_j \cdot \sum_{i \in I_x} \bar{T}_i \\ &= \sum_{i,j \in I_x} e_j \cdot \bar{T}_i = \sum_{i,j \in I_x} \bar{T}_{ij} \end{aligned}$$

- e) Es sei x kein Fixpunkt von $\bar{T}_i$, dann gibt es

$$x_j = 0 \quad \text{und} \quad x_k = 1 \quad \text{sowie} \quad \bar{t}_{ikj} = 1.$$

Denn damit wird die j -te Komponente in $y = (y_m) = x \cdot \bar{T}_i$ zu $y_j = 1$.

Nun wird gezeigt, dass dann auch für $z = (z_m) = x \cdot (x \cdot \bar{T})$ gilt: $z_j = 1$.

Es ist $z_k = \sum_{m,n} x_m \cdot x_n \cdot \bar{t}_{m n k}$.

Da nun $x_i = 1$ und $x_k = 1$ sowie $\bar{t}_{i k j} = 1$ gilt wie behauptet: $z_j = 1$.

Daher ist x kein Fixpunkt von $\bar{T}$.

Anders herum muss also jeder Fixpunkt von $\bar{T}$ mit $x_i = 1$ auch ein Fixpunkt von $\bar{T}_i$ sein.

- f) Die Matrizen sind vollständig, da $\bar{T}$ vollständig ist. Dafür, dass die Matrizen abgeschlossen sind, wird gezeigt, dass $\bar{T}_i \cdot \bar{T}_i = \bar{T}_i$.

Es sei $\bar{t}_{i j l} = 1$ und $\bar{t}_{i l k} = 1$. Zu zeigen ist, dass dann auch $\bar{t}_{i j k} = 1$.

Da $\bar{T}$ vollständig ist, ist $\bar{t}_{i j i} = 1$.

Damit ist $\bar{t}_{i j i} \cdot \bar{t}_{i j l} \cdot \bar{t}_{i l k} = 1$. Dies ist nun ein Summand in der Berechnung von $\bar{t}_{i j k}$ im Produkt $\bar{T} * \bar{T}$. Da nun $\bar{T} * \bar{T} = \bar{T}$ gilt, wie verlangt: $\bar{t}_{i j k} = 1$.

Schließlich sind die Matrizen komplett, da jede Zeile der Matrix ein Fixpunkt von $\bar{T}$ ist. Enthält ein solcher Fixpunkt einen Widerspruch, so sind alle Komponenten mit 1 belegt.

- g) Für einen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkt x von $\bar{T}$ gilt: $x_i = 1$ oder $x_{[i]} = 1$. Es handelt sich gemäß e) also entweder um einen Fixpunkt von $\bar{T}_i$ oder um einen Fixpunkt von $\bar{T}_{[i]}$. Beide Matrizen besitzen aber keinen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkt, also kann es keinen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkt von $\bar{T}$ geben und die zugehörige 3-KNF ist nicht erfüllbar.
- h) Dies ist offensichtlich, denn es können alle widerspruchsfreien vollständigen Fixpunkte der Matrizen $\bar{T}_i$ und $\bar{T}_{[i]}$ mit dem angegebenen Aufwand mit $\bar{T}$ multipliziert werden, um zu überprüfen, ob sie auch Fixpunkte von $\bar{T}$ sind. Andere vollständige widerspruchsfreie Fixpunkt von $\bar{T}$ kann es gemäß e) nicht geben.
- i) Dies wird durch Beispiel 2 weiter unten gezeigt.

Beispiel 1:

Im Folgenden wird eine 3- KNF angegeben bei der $\bar{T}$ eine vollständige widerspruchsfreie Zeile besitzt:

$$(A \vee B \vee D) \wedge (A \vee \bar{B} \vee F) \wedge (\bar{A} \vee D \vee \bar{E}) \wedge (A \vee \bar{C} \vee \bar{E}) \wedge (A \vee E \vee F) \wedge \\ (B \vee C \vee E) \wedge (\bar{B} \vee C \vee \bar{D}) \wedge (\bar{B} \vee \bar{D} \vee \bar{F})$$

Nummerierung der Elementaraussagen:

A	B	C	D	E	F	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$	$\bar{E}$	$\bar{F}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mit $\bar{A} \vee D \vee \bar{E} \Leftrightarrow \bar{D} \rightarrow (E \rightarrow \bar{A}) : \bar{t}_{10 \ 5 \ 7} = 1$

Mit $A \vee B \vee D \Leftrightarrow \bar{D} \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B) : \bar{t}_{10 \ 7 \ 2} = 1$

Als Tautologie $\bar{D} \rightarrow (E \rightarrow \bar{D}) : \bar{t}_{10 \ 5 \ 10} = 1$

Also $\bar{t}_{10 \ 5 \ 10} \cdot \bar{t}_{10 \ 5 \ 7} \cdot \bar{t}_{10 \ 7 \ 2} = 1 \Rightarrow \bar{t}_{10 \ 5 \ 2} = 1$

Mit $A \vee \bar{B} \vee F \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow (B \rightarrow F) : \bar{t}_{7 \ 2 \ 6} = 1$

Also $\bar{t}_{10 \ 5 \ 7} \cdot \bar{t}_{10 \ 5 \ 2} \cdot \bar{t}_{7 \ 2 \ 6} = 1 \Rightarrow \bar{t}_{10 \ 5 \ 6} = 1$

Mit $A \vee \bar{C} \vee \bar{E} \Leftrightarrow \bar{A} \rightarrow (E \rightarrow \bar{C}) : \bar{t}_{7 \ 5 \ 9} = 1$

Als Tautologie $\bar{D} \rightarrow (E \rightarrow E) : \bar{t}_{10 \ 5 \ 5} = 1$

Also $\bar{t}_{10 \ 5 \ 7} \cdot \bar{t}_{10 \ 5 \ 5} \cdot \bar{t}_{7 \ 5 \ 9} = 1 \Rightarrow \bar{t}_{10 \ 5 \ 9} = 1$

Dies liefert den vollständigen widerspruchsfreien Vektor

$$x = (010011101100)$$

Und es gilt: $x \subset \bar{T}_{10 \ 5}$

$B(x)$ lautet:

A	B	C	D	E	F
f	w	f	f	w	w

Da $B(x)$ eine erfüllende Belegung der vorgegebenen KNF ist, ist x auch ein Fixpunkt von $\bar{T}$.

Es gilt: $x = \bar{T}_{10 \ 5}$.

Die vorgestellte 3-KNF gehört zu keiner Klasse, von der bereits bekannt ist, dass ihre Erfüllbarkeit in Polynomialzeit entschieden werden kann [3], [4].

Beispiel 2:

Hierbei wird eine 3-KNF G konstruiert, die nicht erfüllbar ist. Der Abschluss des Feldes $L(G)$ zeigt jedoch keinen Widerspruch:

Man geht von den möglichen 32 5-Klauseln aus, die jede der Elementaraussagen A, B, C, D, E oder ihre Negation als Literale enthalten. Unter Hinzunahme von weiteren 64 Elementaraussagen $F_1 \cdots F_{64}$ werden diese wie im Beispiel in 3-Klauseln zerlegt.

$$(A \vee B \vee C \vee D \vee E) \Leftarrow (A \vee B \vee F_1) \wedge (\bar{F}_1 \vee C \vee F_2) \wedge (\bar{F}_2 \vee D \vee E)$$

Dadurch ergeben sich 96 3-Klauseln aus 69 Elementaraussagen und ihren Negationen. Da alle möglichen 5-Klauseln der Elementaraussagen A, B, C, D, E Resolventen der 3-KNF sind, ist auch diese 3-KNF nicht erfüllbar. Der Abschluss des Feldes $L(G)$ weist aber keinen Widerspruch auf.

Höher dimensionale Felder

Vorgegeben sei ein dreidimensionales Feld $T = (t_{ijk})$.

Durch die einfache Multiplikation des Feldes mit sich entsteht ein vierdimensionales Feld:

$$T \cdot T = S = (s_{ijkl})$$

$$\text{Mit: } s_{ijkl} = \sum_{p=1}^{2n} t_{ijp} \cdot t_{pkl}$$

In $L^{-1}(S)$ treten neben den bereits in $L^{-1}(T)$ vorhandenen 3-Klauseln, die zu äquivalenten 4-Klauseln erweitert sind, noch Resolventen der 3-Klauseln aus $L^{-1}(T)$ auf. Es gilt also:

$$L^{-1}(T) \Leftrightarrow L^{-1}(S).$$

Hier kann nun folgende Abbildung boolescher Vektoren gebildet werden:

$$F_4 : x \mapsto x \cdot (x \cdot (x \cdot T))$$

Wie im zwei und dreidimensionalen Fall werden erfüllende Belegungen der KNF genau durch widerspruchsfreie vollständige Fixpunkte der Abbildung F_4 gegeben. Analog zum dreidimensionalen Fall kann nach Vervollständigung des Feldes ein Produkt des Feldes gebildet werden, dass nach wiederholter Anwendung dazu führt, dass alle Zeilen des Feldes auch Fixpunkte des Feldes sind:

$$S * S = U = (u_{ijkl}) \text{ mit}$$

$$u_{ijkl} = \sum_{p,q,r=1}^{2n} s_{ijkp} \cdot s_{ijkq} \cdot s_{ijk r} \cdot s_{pqrl}.$$

Nach Bildung des Produktes wird das Feld vervollständigt.

Der Aufwand zur Ermittlung des Abschlusses von S beträgt $O((n)^{11})$.

Die Menge der 3-KNF, deren Erfüllbarkeit auf diesem Wege entschieden kann, ist größer als die Menge, die durch dreidimensionale Felder entschieden werden kann.

Schließlich kann S wiederholt mit T multipliziert werden. Bei jeder Multiplikation erhöht sich die Dimension um Eins. Die Menge der entscheidbaren KNF vergrößert sich einerseits, andererseits wächst der Rechenaufwand zu $O(n^{3k-1})$ für ein k -dimensionales Feld.

Ist eine KNF gegeben deren Klauseln maximal m Literale mit $m > 3$ enthalten, so kann einerseits eine erfüllbarkeitsäquivalente 3-KNF gebildet werden. Die KNF kann aber auch direkt auf ein m -dimensionales Feld S abgebildet werden. Führt der Abschluss dieses Feldes nicht zur Entscheidung über die Erfüllbarkeit der KNF, so kann die Dimension wie folgt um 1 erhöht werden:

Es sei E dasjenige dreidimensionale Feld, für das $L^{-1}(E)$ die 3-KNF ist, deren Klauseln genau die Tautologien in den vorliegenden Elementaraussagen sind. Nun wird $W = E \cdot S$ gebildet. Dieses Feld besitzt die Dimension $m + 1$ und es gilt: $L^{-1}(W) \Leftrightarrow L^{-1}(S)$. Entsprechend können, wenn erforderlich weitere höherdimensionale Felder gebildet werden.

Eine KNF heißt **k -dicht**, wenn k die kleinste natürliche Zahl ist, so dass die Erfüllbarkeit der KNF über ein k -dimensionales Feld entschieden werden kann.

Satz 7:

Für jede KNF mit n Elementaraussagen gibt es ein $k \leq n$, so dass die KNF k -dicht ist. Der Aufwand, um die Erfüllbarkeit der KNF zu entscheiden beträgt dann $O(n^{3k-1})$.

Für $k > \frac{n}{3 \cdot \ln n} \cdot \ln 2 + \frac{1}{3}$ ist dies größer als $O(2^n)$.

Beweis:

Es wird gezeigt, dass spätestens das n -dimensionale Feld zu einer Entscheidung über die Erfüllbarkeit der KNF führt. Natürlich kann bereits ein niederdimensionales Feld zu einer Entscheidung führen.

Vorgegeben sei eine KNF. M sei das zugehörige n -dimensionale abgeschlossene Feld. Es werden die Zeilen $M_{i_1 \dots i_{n-1}}$ betrachtet.

Fall 1:

Alle Zeilen beinhalten einen Widerspruch. In diesem Falle ist die KNF nicht erfüllbar.

Fall 2:

Es gibt widerspruchsfreie Zeilen.

Fall 2a:

Gibt es unter den widerspruchsfreien Zeilen wenigstens eine vollständige Zeile $M_{i_1 \dots i_{n-1}}$, so ist $B(M_{i_1 \dots i_{n-1}})$ eine zulässige Belegung der Elementaraussagen und die KNF wird darüber erfüllt.

Fall 2b:

Es gibt eine unvollständige widerspruchsfreie Zeile $M_{i_1 \dots i_{n-1}}$.

Aufgrund der Tautologien gilt für die Komponenten:

$$M_{i_1 \dots i_{n-1} i_1} = \dots = M_{i_1 \dots i_{n-1} i_{n-1}} = 1.$$

Da die Zeile widerspruchsfrei ist, werden durch $B(M_{i_1 \dots i_{n-1}})$ $(n-1)$ Elementaraussagen belegt.

Da die Zeile ein Fixpunkt ist, tritt durch diese Belegung kein Widerspruch in der KNF auf. Es fehlt nur noch die Belegung einer letzten Elementaraussage A_s . Angenommen die Belegung von A_s mit „Wahr“ führt zum Widerspruch in der KNF.

Dann muss es eine Klausel der Form:

$$\bigvee_{k \in D} \overline{A_{i_k}} \vee \overline{A_s} \text{ geben, wobei } D \subseteq \{i_1 \dots i_{n-1}\}.$$

In diesem Falle wäre aber im abgeschlossenen Feld M die Komponente

$$M_{i_1 \dots i_{n-1} [s]} = 1.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass die Zeile $M_{i_1 \dots i_{n-1}}$ unvollständig ist. Also liefert die Belegung $B(M_{i_1 \dots i_{n-1}})$ und zusätzlich A_s mit „Wahr“ eine zulässige Belegung der KNF und die KNF ist erfüllbar.

Literatur

- [1] **B. Aspvall, M.F. Plass, R.E. Tarjan:** A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas, 1979

- [2] **W. Oberschelp, D.Wille:** Mathematischer Einführungskurs für Informatiker, 1976

- [3] **T.J. Schaefer:** The complexity of satisfiability problems. Sympos. on Theory of Computing. ACM, 1978

- [4] **U. Schöning, J. Torán :** Das Erfüllbarkeitsproblem SAT, 2011