Das 3X3 LQ

Es ist bekannt, dass es lateinische Quadrate für jedes Ausmaß nXn gibt. Im Folgenden sollen lateinische Quadrate auch kurz als LQ bezeichnet werden. Insbesondere ist ein 3X3-LQ zum Beispiel gegeben durch:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Da am Beispiel des 3X3-LQ sehr schön zu sehen ist, wie ein abgeschlossenes dreidimensionales Feld aussieht, soll dieses einfache Beispiel ausführlich behandelt werden.

Es liegen 27 Elementaraussagen folgender Form vor: Für $1 \leq i, j, k \ \leq 3$

B_{ijk} : In Zeile i und Spalte j steht die Zahl k.

Die zugehörige KNF enthält die 108 Klauseln: Für $1 \leq i, j, k \ \leq 3$

$$B_{i\,j\,1} \vee B_{i\,j\,2} \vee B_{i\,j\,3}$$

$$\overline{B_{i\,j\,1}} \vee \overline{B_{i\,j\,2}}$$

$$\overline{B_{i\,j\,1}} \vee \overline{B_{i\,j\,3}}$$

$$\overline{B_{i\,j\,2}} \vee \overline{B_{i\,j\,3}}$$

$$B_{i\,1\,j} \vee B_{i\,2\,j} \vee B_{i\,3\,j}$$

$$\overline{B_{i\,1\,j}} \vee \overline{B_{i\,2\,j}}$$

$$\overline{B_{i\,1\,j}} \vee \overline{B_{i\,3\,j}}$$

$$\overline{B_{i\,2\,j}} \vee \overline{B_{i\,3\,j}}$$

$$B_{1\,i\,j} \vee B_{2\,i\,j} \vee B_{3\,i\,j}$$

$$\overline{B_{1\,i\,j}} \vee \overline{B_{2\,i\,j}}$$

$$\overline{B_{1\,i\,j}} \vee \overline{B_{3\,i\,j}}$$

$$\overline{B_{2\,i\,j}} \vee \overline{B_{3\,i\,j}}$$

Die Aussagen B_{ijk} werden nun als Elementaraussagen A_p durchnummeriert. Zum Beispiel mit $p = 9 \cdot (i-1) + 3 \cdot (j-1) + k$

In einer Zeile T_{ij} des zugehörigen Feldes werden durch die Tautologien

$\overline{A_i} \vee \overline{A_j} \vee A_i$ sowie $\overline{A_i} \vee \overline{A_j} \vee A_j$

die Komponenten $t_{i\,j\,i}$ und $t_{i\,j\,j}$ mit dem Wert 1 belegt. Dies entspricht der angenommenen Belegung der Elementaraussagen A_i und A_j mit „wahr“. Beim Abschluss des Feldes werden nun alle daraus resultierenden Implikationen gewährleistet. Siehe hierfür auch die Datei „Implikationen“. Jede Zeile $T_{i\,j}$ mit $1 \leq i\,, j \leq 3$ in T steht damit für eine mögliche Vorwahl zweier Belegungen im LQ. Die bis auf Vertauschung von Zahlen, Zeilen und Spalten möglichen Fälle werden nun im Einzelnen betrachtet.

1. Es werden zwei gleiche Zahlen gewählt.
   a) Die Zahlen stehen im gleichen Feld.

1		

Der Vektor $\overline{T}_{i\,i}$ bleibt unvollständig und widerspruchsfrei. Einige Komponenten, die Elementaraussagen negieren, werden mit 1 belegt, es wird aber keine zusätzliche Elementaraussage mit wahr belegt.

   b) Die Zahlen stehen in der gleichen Zeile oder Spalte.

1	1	

Der Vektor $\overline{T}_{i\,j}$ enthält einen Widerspruch. Alle Komponenten sind mit 1 belegt.

   c) Die Zahlen stehen in zwei verschiedenen Zeilen und Spalten.

1		
	1	

Der Vektor $\overline{T}_{i\,j}$ bleibt unvollständig und widerspruchsfrei. Es werden einige Komponenten gefunden, die Elementaraussagen negieren, und zusätzlich wird diejenige Komponente gefunden, die das Feld in der dritten Zeile und dritten Spalte mit 1 belegt.

2. Es werden zwei verschiedene Zahlen gewählt.
    a) Die Zahlen stehen im gleichen Feld.

1, 2		

Der Vektor $\overline{T}_{i\,j}$ enthält einen Widerspruch. Alle Komponenten sind mit 1 belegt.

    b) Die Zahlen stehen in der gleichen Zeile oder Spalte.

1	2	

Der Vektor $\overline{T}_{i\,j}$ bleibt unvollständig und widerspruchsfrei. Einige Komponenten, die für die Negation von Elementaraussagen stehen, werden mit 1 belegt. Zusätzlich wird die Komponente, die für die Belegung des Feldes erste Zeile, dritte Spalte mit 3 steht, mit 1 belegt.

    c) Die Zahlen stehen in zwei verschiedenen Zeilen und Spalten.

1		
	2	

Der Vektor $\overline{T}_{i\,j}$ ist ein vollständiger widerspruchsfreier Vektor. Er steht für das folgende LQ:

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Mit entsprechenden i und j werden alle möglichen zulässigen Belegungen des 3x3-LQ über Vektoren $\overline{T}_{i\,j}$ gefunden.