

## Implikationen im dreidimensionalen Feld

Es wird gezeigt, dass die folgenden Implikationen durch den Abschluss eines dreidimensionalen Feldes gewährleistet werden:

- I.  $((A_i \rightarrow A_j) \wedge (A_j \rightarrow A_k)) \Rightarrow (A_i \rightarrow A_k)$
- II.  $(A_i \rightarrow \bar{A}_i) \Rightarrow \bar{A}_i$
- III.  $(\bar{A}_i \wedge (A_i \vee A_j)) \Rightarrow A_j$  (Vorwärtspropagation)
- IV.  $(\bar{A}_i \wedge (A_i \vee A_j \vee A_k)) \Rightarrow (A_j \vee A_k)$  (Vorwärtspropagation)

Es sei  $T = (t_{i j k})$  ein dreidimensionales Feld und  $\bar{T} = (\bar{t}_{i j k})$  der Abschluss dieses Feldes. Enthält  $L^{-1}(T)$  die Klauseln der jeweiligen Prämisse, so enthält  $L^{-1}(\bar{T})$  auch die Klausel der Conclusio. Es wird ausgenutzt, dass  $T \subseteq \bar{T}$ . Damit kann man davon ausgehen, dass für die Klauseln der Prämisse auch die zugehörigen Einträge in  $\bar{T}$  den Wert 1 besitzen.

Da  $\bar{T}$  abgeschlossen ist, gilt außerdem:

$$\bar{t}_{i j k} = \sum_{p,q} \bar{t}_{i j p} \cdot \bar{t}_{i j q} \cdot \bar{t}_{p q k}$$

Um zu zeigen, dass die Summe den Wert 1 besitzt, reicht es aus, zu zeigen, dass einer der Summanden den Wert 1 besitzt.

### Beweis:

- I. Vorausgesetzt ist:  $\bar{t}_{i i j} = \bar{t}_{j j k} = 1$

Damit ist zu zeigen:  $\bar{t}_{i i k} = 1$

$$\bar{t}_{i i k} = \sum_{p,q} \bar{t}_{i i p} \cdot \bar{t}_{i i q} \cdot \bar{t}_{p q k}$$

Mit  $p = q = j$  liegt ein Summand vor, der den Wert 1 annimmt. Damit ist die Behauptung gezeigt.

- II. Vorausgesetzt ist:  $\bar{t}_{i i \{i\}} = 1$

Dies ist aber unmittelbar der Eintrag in  $\bar{T}$  für die Einsklausel  $\bar{A}_i$ .

- III. Vorausgesetzt ist:  $\bar{t}_{i i [i]} = \bar{t}_{[i] [i] j} = 1$

Damit ist zu zeigen:  $\bar{t}_{[j] [j] j} = 1$

Mit  $\bar{t}_{[i] [i] j} = 1$  gilt auch  $\bar{t}_{[j] [j] i} = 1$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

Zunächst wird gezeigt, dass  $\bar{t}_{[j][j][i]} = 1$

$$\bar{t}_{[j][j][i]} = \sum_{p,q} \bar{t}_{[j][j]p} \cdot \bar{t}_{[j][j]q} \cdot \bar{t}_{pqi}$$

Mit  $p = q = i$  liegt ein Summand vor, der den Wert 1 annimmt und die Behauptung gilt.

Weiter ist

$\bar{t}_{i[i]j} = 1$ , da  $A_{[i]} \vee A_i \vee A_j$  eine Tautologie ist. Nun kann die ursprüngliche Behauptung  $\bar{t}_{[j][j]j} = 1$  gezeigt werden:

$$\bar{t}_{[j][j]j} = \sum_{p,q} \bar{t}_{[j][j]p} \cdot \bar{t}_{[j][j]q} \cdot \bar{t}_{pqj}$$

Mit  $p = i, q = [i]$  liegt ein Summand vor, der den Wert 1 besitzt. Damit ist III. gezeigt.

IV. Vorausgesetzt ist:  $\bar{t}_{i[i]i} = \bar{t}_{[i][j]k} = 1$

Damit ist zu zeigen:  $\bar{t}_{[j][j]k} = 1$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt:

$$\bar{t}_{[j][k]i} = 1$$

Mit  $\bar{t}_{[i][j]k} = 1$  gilt auch  $\bar{t}_{[j][k]i} = 1$ , da das Feld vollständig ist.

$$\bar{t}_{[j][k]i} = \sum_{p,q} \bar{t}_{[j][k]p} \cdot \bar{t}_{[j][k]q} \cdot \bar{t}_{pqi}$$

Mit  $p = q = i$  liegt ein Summand vor, der den Wert 1 besitzt. Damit ist

$$\bar{t}_{[j][k]i} = 1 \text{ gezeigt.}$$

$$\bar{t}_{[j][k]j} = \sum_{p,q} \bar{t}_{[j][k]p} \cdot \bar{t}_{[j][k]q} \cdot \bar{t}_{pqj}$$

Mit  $p = [i], q = i$  ist ein Summand gefunden, der den Wert 1 annimmt. Da das Feld  $T$  vollständig ist, ist wie behauptet auch  $\bar{t}_{[j][j]k} = 1$ .

