

## Die Para-2-KNF

Enthält eine konjunktive Normalform Klauseln mit weniger als 3 Literalen, so ist es möglich, dass ihre Erfüllbarkeit mit dem folgenden Algorithmus in Polynomialzeit gelöst wird. Dabei werden die folgenden Schritte wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erreicht wird.

### Schritt 1: (Vorwärtspropagation)

Enthält die KNF eine Einsklausel  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ), so werden Klauseln, die das Literal  $A_i$  enthalten durch die notwendige Belegung von  $A_i$  mit „wahr“ erfüllt. Diese Klauseln können für die weitere Betrachtung entfallen. Klauseln, die das Literal  $\bar{A}_i$  enthalten, können um dieses Literal reduziert werden. Die Elementaraussage  $A_i$  wird mit „wahr“ belegt und die KNF ist um eine Elementaraussage reduziert.

Schritt 1 wird solange wiederholt, bis

- Für ein  $i$  die beiden Einsklauseln  $A_i$  und  $\bar{A}_i$  in der verbliebenen KNF auftreten. In diesem Falle ist die KNF nicht erfüllbar und das Verfahren bricht ab.
- Für alle  $i$  eine widerspruchsfreie Belegung der Elementaraussagen ermittelt wurde. In diesem Falle ist die KNF erfüllbar und eine zulässige Belegung der Elementaraussagen wurde gefunden. Das Verfahren bricht ab.
- Die KNF nur noch Klauseln mit mehr als einem Literal enthält und kein Widerspruch in der bisherigen Belegung der Elementaraussagen aufgetreten ist. In diesem Falle wird mit Schritt 2 fortgefahren.

### Schritt 2: (Auswertung der Zweiklauseln)

Enthält die KNF beim ersten Anlauf von Schritt 2 keine 2-Klauseln, so bricht das Verfahren ab. Es liegt keine Para-2-KNF vor. Enthält die KNF bei wiederholtem Anlauf von Schritt 2 keine neuen Zweiklauseln, die im vorangegangenen Schritt 1 ermittelt wurden, so bricht das Verfahren ab und es wird Schritt 3 durchgeführt. Sonst:

Die Teilmenge aller 2-Klauseln bildet eine 2-KNF  $U$ . Diese wird auf die Matrix  $L(U) = M = (m_{ij})$  abgebildet. Die Matrix  $M$  wird zu  $\bar{M}$  abgeschlossen. Die Klauseln aus  $L^{-1}(\bar{M})$ , die noch keine Klauseln der Ausgangs-KNF waren, werden dieser hinzugefügt.

Insbesondere, wenn dabei Einsklauseln entstanden sind, also  $\bar{m}_{i[i]} = 1$ , läuft das Verfahren mit Schritt 1 weiter. Wurden keine neuen Einsklauseln gefunden, so wird Schritt 3 durchgeführt.

### **Schritt 3:** (Auswertung der Matrix $\overline{M}$ )

Führen wiederholte Durchführungen von Schritt 1 und Schritt 2 nicht zur Entscheidung der Erfüllbarkeit der KNF und gab es Zweiklauseln, die betrachtet wurden, so kann abschließend noch die Matrix  $\overline{M}$  zur Lösung herangezogen werden. Alle vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkte  $x$  von  $\overline{M}$  können daraufhin untersucht werden, ob  $B(x)$  auch für die gesamte KNF eine zulässige Belegung ist. Andere Belegungen erfüllen bereits die Teilmenge der Zweiklauseln nicht und damit auch nicht die gesamte KNF. Gibt es nur wenige vollständige widerspruchsfreie Fixpunkte von  $\overline{M}$ , so ist hierüber immer noch eine Entscheidung der Erfüllbarkeit der KNF in Polynomialzeit gewährleistet.

### **Abschließende Bemerkung**

Die Para-2-KNF ist dreidicht. Alle Implikationen, die hier benutzt werden, werden durch das Produkt dreidimensionaler Felder erfüllt. (siehe Datei Implikationen) Dies gilt auch dann, wenn Klauseln mit mehr als drei Literalen unter Hinzunahme weiterer Elementaraussagen in Dreiklauseln zerlegt werden.