Geordnetes Resolutionskalkül

Es ist bekannt, dass das allgemeine Resolutionskalkül widerlegungsvollständig ist. Der Aufwand ist dabei als exponentiell einzuordnen. Es ist jedoch möglich, ein geordnetes Resolutionskalkül durchzuführen, bei dem im k-ten Schritt nur p-Klauseln mit p≤k resolviert werden. Dabei gibt es konjunktive Normalformen, die als k-dicht bezeichnet werden, deren Erfüllbarkeit bereits im k-ten Schritt entschieden werden kann. Für kleine Werte von k ergibt sich dann ein polynomialer Aufwand.

1-dichte KNF

Enthält eine KNF Einsklauseln, so können durch Vorwärtspropagation weitere Einsklauseln erzeugt werden. Wird durch die vorgegebenen und resolvierten Einsklauseln bereits die Erfüllbarkeit entschieden, so ist die KNF 1-dicht. Die Entscheidung kann über einen Widerspruch erfolgen. Wird für ein i sowohl die Einsklausel A_i als auch die Einsklausel $\overline{A_i}$ abgeleitet, so ist die KNF nicht erfüllbar.

Wird für jede Elementaraussage eine Einsklausel A_i oder $\overline{A_i}$ abgeleitet und erfüllt die daraus resultierende Belegung der Elementaraussagen die KNF, so ist die KNF erfüllbar.

2-dichte KNF

Aus zwei Zweiklauseln lässt sich gegebenenfalls wieder eine Zweiklausel revolvieren:

$$(A_i \vee A_j) \wedge (\overline{A_i} \vee A_k) \Rightarrow (A_j \vee A_k)$$

Es ist auch möglich, dass sich aus zwei Zweiklauseln eine Einsklausel ableiten lässt

$$(A_i \vee A_j) \wedge (\overline{A_i} \vee A_j) \Rightarrow A_j$$

Schließlich kann aus einer geeigneten Einsklausel und einer Zweiklausel eine neue Einsklausel gebildet werden:

$$(A_i \vee A_j) \wedge \overline{A_i} \Rightarrow A_j$$

Lässt sich die Erfüllbarkeit einer KNF nur durch Vorwärtspropagation und den Resolventen der Zweiklauseln entscheiden, so ist sie 2-dicht. Vergleiche dazu auch die Ausführungen zur Para-2-KNF.

Alle 2-KNF sind 2-dicht.

3-dichte KNF

Hier werden alle Eins-Zwei- und Dreiklauseln betrachtet, die gegeben sind und als Resolventen entstehen.

Die Resolventen aus Eins- und Zweiklauseln wurden bereits besprochen.

Eine Eins- und eine Dreiklausel kann zu einer Zweiklausel führen:

$$\left(A_i \vee A_j \vee A_k\right) \wedge \overline{A_i} \Rightarrow \left(A_j \vee A_k\right)$$

Eine Zwei und eine Dreiklausel kann zu einer weiteren Dreiklausel führen:

$$\left(A_i \vee A_j \vee A_k\right) \wedge \left(\overline{A_i} \vee A_l\right) \Rightarrow \left(A_j \vee A_k \vee A_l\right)$$

Zwei Dreiklauseln können zu einer weiteren Dreiklausel führen:

$$\left(A_i \vee A_j \vee A_p\right) \wedge \left(A_i \vee \overline{A_p} \vee A_q\right) \Rightarrow \left(A_i \vee A_j \vee A_q\right)$$

Drei Dreiklauseln können zu einer weiteren Dreiklausel führen:

$$\left(A_i \vee A_j \vee A_p\right) \wedge \left(A_i \vee A_j \vee A_q\right) \wedge \left(\overline{A_p} \vee \overline{A_q} \vee A_k\right) \Rightarrow \left(A_i \vee A_j \vee A_k\right)$$

Wird im letzten Fall A_k in der dritten Klausel durch A_i ersetzt, so kann die Resolvente auch eine Zweiklausel sein.

$$\left(A_i \vee A_j \vee A_p\right) \wedge \left(A_i \vee A_j \vee A_q\right) \wedge \left(\overline{A_p} \vee \overline{A_q} \vee A_i\right) \Rightarrow \left(A_i \vee A_j\right)$$

Dieses auf Eins- Zwei- und Dreiklauseln reduzierte Resolventenkalkül kann mit Hilfe eines dreidimensionalen Feldes und eines Produktes für das Feld durchgeführt werden. Es gibt KNF, bei denen dieses Verfahren zur Entscheidung der Erfüllbarkeit führt. Diese KNF sind 3-dicht.

k-dichte KNF

Das reduzierte Resolutionsverfahren lässt sich für beliebige Werte von k beschreiben. Es werden jeweils nur Resolventen betrachtet, die höchstens k Literale besitzen. So lässt sich aus k k-Klauseln gegebenenfalls wieder eine k-Klausel resolvieren. Reicht es zur Entscheidung der Erfüllbarkeit einer KNF aus, nur Resolventen mir maximal k Literalen zu betrachten, so ist die KNF k-dicht.