Dreidimensionale Felder und renamable Hornformeln

Es sei U eine 3-KNF und $L(U) = S = (s_{i\,j\,k})$ das zugehörige dreidimensionale Feld. S wird nur teilweise zu T vervollständigt. In $L^{-1}(T)$ sollen sich zu einer Klausel $A_i \to (A_j \to A_k)$ alle äquivalenten Klauseln befinden. D.h.

$$t_{i\,j\,k} = 1 \Rightarrow t_{j\,i\,k} = t_{i\,[k][j]} = t_{[k]i\,[j]} = t_{j\,[k][i]} = t_{[k]j\,[i]} = 1$$

Außerdem $t_{i\,j\,j} = 1$ Für alle i und j.

Weiter sei T_i die Untermatrix, in der die Komponenten den ersten Index i besitzen.

$$T_i = (a_{j\,k}) \qquad a_{j\,k} = t_{i\,j\,k}$$

Dann ist U genau dann renamable Horn, wenn

$$\sum_i T_i$$

wenigstens einen vollständigen widerspruchsfreien Fixpunkt besitzt.

Dies gilt offensichtlich, da $L^{-1}(\sum_i T_i)$ genau die Zweiklauseln enthält, die zum Nachweis herangezogen werden, dass eine KNF renamable Horn ist. Daneben nur noch die Tautologien $A_i \to A_i$.

Die Tatsache ist zwar simpel, zeigt aber, welch starke Bedingung es ist, dass eine KNF renamable Horn ist.

Im Allgemeinen gilt: Es sei U eine erfüllbare KNF und T das zugehörige vollständige Feld . Weiter sei x ein vollständiger widerspruchsfreier Fixpunkt von T und damit $B(x)$ eine zulässige Belegung für U.

Gilt nun $x_i = 1$, so ist x ein Fixpunkt von T_i . Mit $I_x = \{i | x_i = 1\}$ gilt im Allgemeinen also lediglich:

x ist ein Fixpunkt von $\sum_{i\epsilon\ x} T_i$.